Stirlingsche Zahlen 2. Art

Kanold, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 2000 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.65-67

J. Cramer Verlag, Braunschweig

HANS-JOACHIM KANOLD, Braunschweig

Stirlingsche Zahlen 2. Art

Braunschweig, 14.04.2000*

In diesem Vortrag werden frühere Untersuchungen (Abh. BWG Band 36 (1984), 203–229) fortgeführt. Wir beginnen mit der

(1) Definition: $S_{n,k}$ sei die Anzahl der verschiedenen Aufspaltungen einer Menge von n Elementen in k nichtleere Teilmengen. $S_{n,k}$ heisst Stirlingsche Zahl 2. Art.

(2) Sofort zu sehen ist $S_{n,1} = S_{n,n} = 1$, sowie $S_{n,k} = 0$ für $k < 1$ und $k > n$.

(3) Es gilt die Grundbeziehung $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
Wir können die $S_{n,k}$ in einem „dreieckigen Schema", analog dem Pascal-Dreieck für Binomialkoeffizienten, anordnen; $S_{n,k}$ steht in der n-ten Zeile an der k-ten Stelle.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1
\end{array} \qquad \text{usw.}$$

Mit Hilfe von (3) und vollständiger Indunktion ($n \to n+1$) kann man zeigen

$$(4)\ (k-1)!S_{n,k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} (j+1)^{n-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} (k-j)^{n-1}.$$

Es ergeben sich einige, z. T. noch ungelöste, Probleme.

(5) a) Sind unter den $S_{n,k}$ endlich viele oder unendlich viele Primzahlen?
b) Kann man für $S_{n,k}$ handliche Abschätzungen angeben?
c) Wo nimmt, bei festem n, $S_{n,k}$ ein Maximum an?

Sehr einfach ist die bekannte logarithmische Konvexität der $S_{n,k}$ zu beweisen:

$$(6)\ 2 \leq k \leq n-1 \Longrightarrow S_{n,k}^2 \geq S_{n,k-1} \cdot S_{n,k+1} \frac{k}{k-1} \cdot \frac{n-k+2}{n-k+1} > S_{n,k-1} S_{n,k+1}.$$

Hieraus ergibt sich, dass zu jedem n ein $k^\star(n) = k^\star$ existiert, so dass

* Kurzfassung eines Vortrags, gehalten in der Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft

(7) $1 = S_{n,1} < S_{n,2} < \cdots < S_{n,k^\star} \geq S_{n,k^\star+1} > \cdots > S_{n,n} = 1$

erfüllt ist. Es wird vermutet, dass

(8) $S_{n,k^\star} > S_{n,k^\star+1}$

gilt, aber bisher scheint dies noch unbewiesen zu sein. Für $k^\star$ lassen sich die folgenden Abschätzungen zeigen

(9) $$10 \leq n \Longrightarrow 1 + \frac{\log\log n}{\log n} - \frac{2}{\sqrt{n}} < k^\star \frac{\log n}{n} < 1 + \frac{\log\log n}{\log n}.$$

Etwas unschärfere Schranken wurden schon früher veröffentlicht. Für grosse n ergibt sich z. B.

(10) $$k^\star > \pi(n) = \sum_{p \leq n} 1.$$

Ein weiteres bekanntes Resultat lautet

(11) $$1 \leq k \leq n \Longrightarrow S_{n,k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} S_{n,k-j} = \frac{k^n}{k!} = \frac{k^{n-1}}{(k-1)!},$$

also auch

(12) $$S_{n,k} \leq \frac{{k^\star}^{n-1}}{(k^\star - 1)!}.$$

Zusammen mit (9) ergibt sich eine obere Schranke für das Zeilenmaximum. Berücksichtigen wir $\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j} = (1-1)^{k-1} = 0$, dann folgt aus (4) und dem „kleinen" Fermatschen Satz, wenn $n = p$ (Primzahl) ist

(13) $p \mid S_{p,k}$ für $1 < k < p$.

Mit Hilfe von (3) und vollständiger Indunktion lässt sich zeigen

(14) $$S_{n,n-1} = \binom{n}{2};\ S_{n,n-2} = 3\binom{n}{4} + \binom{n}{3};\ S_{n,n-3} = 15\binom{n}{6} + 10\binom{n}{5} + \binom{n}{4};$$
$$S_{n,n-4} = 105\binom{n}{8} + 105\binom{n}{7} + 25\binom{n}{6} + \binom{n}{5};$$
$$S_{n,n-5} = 945\binom{n}{10} + 1260\binom{n}{9} + 490\binom{n}{8} + 56\binom{n}{7} + \binom{n}{6}.$$

Weil aus (4) auch $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ folgt, ergibt sich aus (7) und (13)

(15) Für $n = p > 3$ ist in der p-ten Zeile des Schemas (3) keine Primzahl. Weil aus (3) und (13) auch

(16) $p \mid S_{p+j,k}$ für $3 \leq j + 2 \leq k \leq p$

folgt, befindet sich auch unter diesen Zahlen keine Primzahl. Die Beantwortung der Frage (5) a) scheint sehr schwierig zu sein. Wir stellen daher die folgende Vermutung auf:

(17) Unter den $S_{n,k}$ gibt es genau dann unendlich viele Primzahlen, wenn es unendlich viele Mersenne-Primzahlen gibt.

In (4) erschweren die alternierenden Vorzeichen die Abschätzungen. In (14) werden $S_{n,k} = S_{n,n-(n-k)}$ für $n - 5 \leq k \leq n - 1$ als $\sum_{j=n-k+1}^{2(n-k)} A_j \binom{n}{j}$ mit $A_j \in \mathbb{N}$ dargestellt. Es ist leicht zu zeigen, dass unter diesen $S_{n,k}$ höchstens endlich viele Primzahlen sein können.

In der eingangs erwähnten Abhandlung wurden u. a. die Binomialkoeffizienten eingehend untersucht. Eine entsprechende Diskussion der $S_{n,k}$ steht bisher noch aus.

Prof.em.Dr.rer.nat. Hans-Joachim Kanold
Güldenstraße 41
D-38100 Braunschweig